Mathématiques financières II

Paiements réguliers au cours de l'année

Voici à nouveau ce que nous avons vu auparavant. Soit i le taux d'intérêt annuel et $q = 1 + i$ le facteur de capitalisation. Nos paiements réguliers P sont m fois versés durant l'année. Ainsi nous avons à la fin de l'année, avec les intérêts

$$P_1 = P \cdot (m + i \cdot \frac{m \pm 1}{2}) \tag{1}$$

$'+'$ s'applique aux mouvements en avance et $'-'$ aux mouvements en retard.

Si nous avions déjà un capital initial C_0, nous avons à la fin de l'année

$$C_1 = C_0 \cdot q + P_1$$

Si $P > 0$ ce sont des dépôts réguliers et si $P < 0$ ce sont des retraits réguliers.

Paiements annuels en fin d'année

Depuis des années, votre mère dépose à la fin de chaque année P_1 = CHF500.– sur un compte d'épargne qui porte intérêt à $i = 3\%$ *p.a.*. Le 31 décembre, elle effectuera son 20e dépôt. Combien s'est accumulé au cours de ces 20 années avec les intérêts composés ?

Ce que nous avons calculé ici, nous pouvons aussi le calculer formellement. Soit P_1 le paiement respectif au 31.12., i le taux d'intérêt annuel ou $q = 1 + i$ le facteur de capitalisation et n le nombre d'années.

$$C_n = P_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{2}$$

Exercices

(1) Ida Meierhans économise 10'000 CHF à la fin de chaque année pour sa maison individuelle pendant 15 ans, à un taux d'intérêt annuel de 4 %. Combien aura-t-elle économisé ?

(2) Lubomir Lutschenkov épargne pour sa pension pendant 22 ans à un taux d'intérêt de 4,5 % par an. Il verse 6'000 euros les 31 décembre. Quel sera le montant de son capital de retraite ?

(3) Rosvita Sergi a épargné un capital de retraite de 150'000 francs suisses. À la fin de chaque année, elle payait un montant fixe à un taux d'intérêt de 5 % par an pendant 19 ans. Quel était ce montant ?

Paiements annuels au début de l'année

Qu'est-ce qui change si les paiements sont effectués au début de l'année plutôt qu'à la fin de l'année ? Chaque paiement au début de l'année P_0 a déjà porté des intérêts jusqu'à la fin de l'année, c'est-à-dire $P_1 = P_0 \cdot (1+i)$. Si nous utilisons cette expression dans la formule précédente, il y a

$$C_n = P_0 \cdot q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{avec} \quad q = 1 + i.$$

Exercices

(4) Résolvez les exercices précédents avec les paiements effectués au début de l'année.

Déboursements annuels

Si j'ai de l'argent (C_0) sur un compte, alors il croît annuellement en fonction des intérêts. Nous avons vu qu'avec un taux d'intérêt annuel de i notre capital croît après n années à

$$C_n = C_0 \cdot q^n \quad \text{avec} \quad q = 1 + i.$$

Si je déplace occasionnellement de l'argent de ce compte vers un autre compte ayant le même taux d'intérêt, alors la somme des deux comptes est égale à C_n. L'argent économisé sur ce compte est exactement l'argent qui manque sur l'autre compte.

Par exemple, on a 100'000 francs suisses sur un compte de pension. Nous percevons une pension annuelle de 11'000 CHF au 1er janvier de chaque année. Le taux d'intérêt annuel est de $i = 3\%$. Combien reste-t-il après 10 ans ?

Exercices

(5) Votre grand-mère a économisé 314'600 CHF. L'argent porte un intérêt de 2,8 % par an. Votre grand-mère reçoit une avance de pension annuelle de 30'000 CHF.
a. Quel sera le montant du crédit disponible après 4 ans ?
b. Quel sera le montant du crédit disponible après 11 ans ?

(6) Vous devez 100'000 euros à 6,2 % par an.
a. Quel montant devez-vous rembourser annuellement à terme échu pour que votre dette, intérêts compris, soit remboursée au bout de 10 ans ?
b. Quel montant devez-vous payer à l'avance ?
c. Combien cela représenterait-il si vous vouliez rembourser votre dette en 20 ans ? Des remboursements annuels pour amortir une dette, sont appelés *annuités*.

Paiements réguliers au cours de l'année sur plusieurs années

Si nous effectuons m paiements P réguliers au cours d'une année, nous avons calculé dans la formule (1) le montant P_1 dont nous disposons à la fin de l'année. C'est justement l'argent que nous payons annuellement à la fin des années dans la formule (2). Si nous avions déjà un capital initial C_0 nous avons après n années

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot q^n + P \cdot (m + i \cdot \frac{m \pm 1}{2}) \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Exercices

(7) À la fin de chaque mois, Alauda Satiega place 100 euros sur son compte d'épargne, qui porte intérêt à 2 % par an. Combien a-t-elle économisé en 30 ans ?

(8) Elisabeth Meierhans tire de ses économies une pension mensuelle de 2 800 CHF, qu'elle retire le 1er de chaque mois. À la banque, elle dispose de 677'412.15 CHF à un taux d'intérêt de 2,4 % par an. Quelle est l'importance de ses économies après 13 ans ?

(9) Voir exercice 6. Vous voulez rembourser votre dette par des versements mensuels.
a. Combien devez-vous payer le dernier jour de chaque mois pour rembourser votre dette en 10 ans ?
b. Combien devrez-vous payer d'avance chaque mois pour rembourser votre dette en 20 ans ?

(10) Une pension est dite *perpétuelle* si le solde créditeur ne diminue pas malgré le versement de la pension. Dans ce cas, il faut tout au plus prévoir des intérêts pour les paiements. La rente perpétuelle est maximale si

$$C_1 = C_0.$$

Mme Kliubenschädl souhaite tirer une rente perpétuelle de son épargne de €1'200'000, afin que ses trois enfants héritent un jour chacun €400'000. La banque paie 3,1 % d'intérêts par an sur son solde créditeur. Combien peut-elle se faire payer maximalment à l'avance de chaque mois ?

Solutions

(1) CHF200'235.90

(2) €217'820.27

(3) CHF4911.75

(4) 1. CHF208'245.30
2. €227'622.18
3. CHF4677.85

(5) a. CHF222704.40
b. CHF35312.75

(6) a. €13'715.83
b. €12'915.09
c. €8'343.26 à l'avance ou €8'860.554 en arriérés

(7) €49'127.94

(8) CHF409'891.85

(9) a. €1111.40
b. €714.39

(10) €3'048,80

28 septembre 2023