

Finanzmathematik II

Regelmässige Zahlungen im Jahresverlauf

Hier nochmals, was wir vorher gesehen haben. Sei i der Jahreszinssatz, bzw. $q = 1 + i$ der Kapitalisierungsfaktor. Unsere regelmässigen unterjährigen Zahlungen P , die m mal im Verlauf des Jahres stattfinden. Dann haben wir am Ende des Jahres mit den Zinsen

$$P_1 = P \cdot \left(m + i \cdot \frac{m \pm 1}{2} \right) \quad (1)$$

'+' gilt bei vorschüssigen Bewegungen und '-' bei nachschüssigen.

Hatten wir bereits ein Anfangskapital K_0 , so haben wir am Ende des Jahres

$$K_1 = K_0 \cdot q + P_1$$

Wenn $P > 0$ handelt es sich um regelmässige Einlagen und wenn $P < 0$ um regelmässige Bezüge.

Jährliche Zahlungen zu Jahresende

Seit Jahren legt deine Mutter für dich jeweils Ende Jahr $P_1 = \text{CHF}500.-$ auf ein Sparkonto, das mit $i = 3\%$ p.a. verzinst wird. Am 31.12. wird sie ihre 20. Einzahlung tätigen. Wie viel hat sich in diesen 20 Jahren mit Zinseszins gesammelt?

Was wir hier gerechnet haben, können wir auch formell rechnen. Sei P_1 die jeweilige Zahlung am 31.12., i der Jahreszins bzw. $q = 1 + i$ der Kapitalisierungsfaktor und n die Anzahl Jahre.

$$K_n = P_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (2)$$

Aufgaben

- (1) Ida Meierhans spart für ihr Einfamilienhäuschen über 15 Jahre jeweils Ende Jahr CHF10'000.- bei einem Jahreszinssatz von 4%. Wie viel wird sie angespart haben?
- (2) Lubomir Lutschenkov spart für seine Rente über 22 Jahre bei einem Zinssatz von 4.5% p.a.. Er zahlt jeweils am 31.12. €6'000 ein. Wie gross wird sein Rentenskapital sein?
- (3) Rosvita Sergi hat ein Rentenskapital von CHF150'000.- erspart. Sie zahlte bei einem Zinssatz von 5% p.a. über 19 Jahre jeweils Ende Jahr einen festen Betrag ein. Wie hoch war dieser Betrag?

Jährliche Zahlungen zu Jahresbeginn

Was ändert sich, wenn die Zahlungen statt Ende Jahr zu Jahresbeginn getätigt werden? Jede Zahlung zu Jahresbeginn P_0 hat bis Ende Jahr schon Zins getragen, d.h. $P_1 = P_0 \cdot (1 + i)$. Setzt man das in der vorigen Formel ein, gibt es

$$K_n = P_0 \cdot q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{wobei} \quad q = 1 + i.$$

Aufgaben

- (4) Löse die vorigen Aufgaben, wenn die Zahlungen zu Beginn des Jahres getätigt wurden.

Jährliche Auszahlungen

Wenn ich Geld (K_0) auf einem Konto liegen habe, dann wächst es Jährlich um den Zins an. Wir haben gesehen, bei einem Jahreszinssatz i wächst unser Kapital nach n Jahren auf

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad \text{wobei} \quad q = 1 + i$$

an.

Wenn ich gelegentlich Geld von diesem Konto auf ein anderes Konto mit *gleichem* Zinssatz verschiebe, dann ist die Summe der beiden Konti gleich K_n . Das auf jenem Konto gesparte Geld ist genau das Geld, das auf diesem Konto fehlt.

Zum Beispiel, auf einem Rentenkonto liegt CHF100'000.-. Wir beziehen jeweils am 1. Januar eine Jahresrente von CHF11'000.-. Der Jahreszinssatz sei $i = 3\%$. Wie viel bleibt nach 10 Jahren übrig?

Aufgaben

- (5) Deine Grossmutter hat CHF314'600.- gespart. Das Geld wird mit 2.8% p.a. verzinst. Deine Grossmutter bezieht eine vorschüssige Jährliche Rente von CHF30'000.-.
- Wie gross ist das Guthaben nach 4 Jahren?
 - Wie gross ist das Guthaben nach 11 Jahren?
- (6) Du hast €100'000.- Schulden, bei einem Jahreszins von 6.2% p.a..
- Wie viel musst du Jährlich nachschüssig zurückzahlen, damit deine Schuld inklusive Zinsen nach 10 Jahren getilgt ist?
 - Wie viel müsstest du vorschüssig zahlen?
 - Wie viel wäre es, wenn du deine Schuld in 20 Jahren tilgen möchtest? Solche jährliche Tilgungszahlungen nennt man *Annuitäten*.

Regelmässige unterjährliche Zahlungen über mehrere Jahre

Wenn wir m regelmässige Zahlungen P im Verlauf eines Jahres machen, haben wir in Formel (1) den Betrag P_1 berechnet, wie viel wir am Ende des Jahres haben. Das ist dann gerade das Geld, das wir jährlich am Ende der Jahre in Formel (2) einzahlen. Hatten wir schon ein Anfangskapital K_0 so haben wir nach n Jahren

$$K_n = K_0 \cdot q^n + P \cdot \left(m + i \cdot \frac{m \pm 1}{2} \right) \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Aufgaben

- (7) Alauda Satiega legt jeweils Ende Monat €100 auf ihr Sparkonto, das mit 2% p.a. verzinst. Wie viel hat sie in 30 Jahren gespart?
- (8) Elisabeth Meierhans bezieht von ihren Ersparnissen eine Monatliche Rente von CHF2'800.-, die sie jeweils am 1. des Monats abhebt. Auf der Bank hat sie CHF677'412.15 bei einem Zinssatz von 2.4% p.a.. Wie gross sind ihre Ersparnisse nach 13 Jahren noch?
- (9) Siehe Aufgaben 6. Du möchtest deine Schuld mit monatlichen Zahlungen tilgen.
- Wie viel musst du jeweils am letzten des Monats überweisen, dass deine Schuld nach 10 Jahren zurückbezahlt ist?
 - Wie viel müsstest du vorschüssig monatlich bezahlen um deine Schuld in 20 Jahren zu begleichen?
- (10) Eine Rente heisst *immerwährend*, wenn das Guthaben trotz Rentenbezügen nicht schrumpft. Dann wird höchstens der Zins für die Auszahlungen gebraucht. Die immerwährende Rente ist maximal, wenn

$$K_1 = K_0.$$

Frau Kliubenschädl möchte von ihren ersparten €1'200'000 eine immerwährende Rente beziehen, so dass ihre drei Kinder einmal je €400'000 erben werden. Die Bank verzinst ihr Guthaben mit 3.1% p.a.. Wie viel kann sie sich maximal monatlich vorschüssig auszahlen?

Lösungen

- (1) CHF200'235.90
- (2) €217'820.27
- (3) CHF4911.75
- (4) 1. CHF208'245.30
2. €227'622.18
3. CHF4677.85
- (5) a. CHF222704.40
b. CHF35312.75
- (6) a. €13'715.83
b. €12'915.09
c. €8'343.26 vorschüssig oder €8'860.554 nachschüssig
- (7) €49'127.94
- (8) CHF409'891.85
- (9) a. €1111.40
b. €714.39
- (10) €3'048,80

28. September 2023