

Mathématiques financières I

L'idée de Gauss

Une anecdote de la troisième année de l'école primaire de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) : son professeur de l'époque, J. G. Büttner, punit le jeune sauvage Carl en lui confiant la tâche d'additionner tous les nombres de 1 à 100 - s'il avait vraiment additionné tous les nombres les uns après les autres, Carl aurait été occupé pendant un certain temps. Mais il a trouvé la bonne solution après quelques minutes seulement....

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 5050$$

Comment l'a-t-il calculé? Il a écrit la somme dans l'ordre inverse en dessous et a additionné les deux ensemble :

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

CETTE IDÉE GÉNIALE NE FONCTIONNE QUE SI :
CHAQUE ÉTAPE DE LA SOMME EST ÉGALE !!!

Une suite de nombres ayant cette propriété (chaque étape est de même taille) est appelée *suite arithmétique*.

Exercices

- (1) Utilisez cette idée pour calculer la somme de 1 à 1000.
- (2) Dans une grande salle de concert, la première rangée de sièges compte 30 places, la deuxième 32, la troisième 34 et ainsi de suite toujours deux places de plus jusqu'à la dernière rangée de 100 places.
 - (a) Combien de rangées de sièges y a-t-il dans cette salle de concert ?
 - (b) Combien de sièges y a-t-il dans la salle ?
- (3) Un philatéliste découvre la machine à timbrer au bureau de poste. Cette machine accepte les pièces (-0.05, -0.1, -0.2, -0.5, 1.-, 2.- et 5.-) jusqu'à un montant maximum de 9.95. Vous insérez l'argent et appuyez sur le bouton vert, puis la machine imprime le timbre correspondant. Cette machine peut donc imprimer tous les timbres de 0.05 à 9.95 par incréments de cinq centimes. Notre ami veut cette gamme complète pour sa collection et se met immédiatement au travail.
 - (a) Combien de timbres différent cette machine peut-elle imprimer ?
 - (b) Quelle est la valeur de cette collection de timbres.
 - (c) Combien de pièces faudra-t-il si nous insérons toujours les pièces les plus grandes possibles? (Attention aux pièces de vingt centimes et aux pièces de deux francs)

Les placements au cours de l'année

Les placements effectués au cours de l'année portent intérêt au prorata, c'est-à-dire en fonction de la période de l'année. Par exemple, si l'argent est investi pour un trimestre ($\frac{1}{4}$ année) à un taux d'intérêt annuel i , l'intérêt est de $\frac{1}{4}i$.

Exercices

- (4) Pour ces tâches, chaque mois est $\frac{1}{12}$ d'année et le taux d'intérêt $i = 2\%$ p.a s'applique à toutes les devises.
- (a) Goretí Rodrigues Costa investit CHF4'200.- pour un trimestre, combien d'intérêts lui rapporte-t-elle ?
 - (b) Ulrich Abgottspon investit CHF885.- pendant 10 mois, quel est le montant des intérêts qu'il reçoit ?
 - (c) Suniti Sugaya verse ¥30'000 sur son compte d'épargne au début de chaque mois. Combien d'argent y a-t-il sur ce compte après le crédit d'intérêt à la fin de l'année ?
 - (d) Combien d'argent Mme Sugaya aurait-elle sur son compte à la fin de l'année si elle avait déposé ses économies le dernier jour de chaque mois ?
 - (e) Mosta Guerilovska avait €120'000 sur son compte au 1.1.2019. Quel était le montant des intérêts crédités sur son compte à la fin de l'année ?
 - (f) Mme Guerilovska a retiré €4'800 le 1.1.2020. Combien aura-t-elle sur son compte à la fin de l'année après le crédit d'intérêts ?
 - (g) D'ici la fin de 2020, Hiro Lokito aura économisé exactement 100 000 francs grâce au crédit d'intérêt. Quel est le montant maximum qu'il peut retirer le 1.1.2021 s'il veut avoir CHF100'000.- sur son compte le 31.12.2021 après le crédit d'intérêt ?
 - (h) Ika Tsokhim épargne et verse 6'000 roupies sur son compte quatre fois, respectivement au début de chaque trimestre. Combien a-t-elle économisé à la fin de l'année après le crédit d'intérêt ?
 - (i) Sa sœur Norla verse 2'000 roupies au début de chaque mois. De combien dispose-t-elle à la fin de l'année après le crédit d'intérêts ?
 - (j) Et son père, Nuri Tsokhim, économise 2 000 roupies à la fin de chaque mois. Combien économise-t-il en un an avec les intérêts ?
 - (k) Lisa Salaté a hérité 420'000 francs suisses. Elle en touche un supplément de pension de CHF800.- le 1er de chaque mois. Combien reste-t-il après un an après le crédit d'intérêt ?
 - (l) Si Mme Salaté souhaite disposer à nouveau de CHF420'000.- sur son compte à la fin de l'année, quel montant pourrait-elle retirer le 1er de chaque mois ?
 - (m) Combien Mme Salaté pourrait-elle retirer à la fin de chaque mois si son solde de CHF420'000.- ne devait pas diminuer ?

- (n) Diego Schnidrig ouvre un compte le 31.1. et effectue son premier dépôt. Combien doit-il déposer à la fin de chaque mois pour économiser exactement CHF10'000.- à la fin de l'année après le crédit d'intérêts ?

Solutions

- (1) 500'500
- (2) (a) 36
(b) 2'340
- (3) (a) 199
(b) 995.-
(c) $-.05*100, -.1*80, -.2*160, -.5*100, 1.-*80, 2.-*160, 5.-*100$
- (4) (a) CHF21.-
(b) CHF14.75
(c) ¥363'900
(d) ¥363'300
(e) €2'400
(f) €119'952
(g) CHF1'960.75
(h) 24'300 rupie
(i) 24'260 rupie
(j) 24'220 rupie
(k) CHF418'696.-
(l) CHF692.45
(m) CHF693.60
(n) CHF825.80

28 septembre 2023